Голові разової спеціалізованої вченої ради
доктору фізико-математичних наук, професору
механіко-математичного факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
МАЙБОРОДІ Ростиславу Євгеновичу

ВІДГУК

офіційного опонента

доктора фізико-математичних наук,

професора кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей

Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Іванова Олександра Володимировича

на дисертацію **Приходько Ольги Дмитрівни**

на тему: **«Оцінювання параметрів в афінних дифузійних моделях з довгостроковою залежністю»**

подану на здобуття ступеня доктора філософії

в галузі знань 11 «Математика та статистика»

за спеціальністю 112 «Статистика»

Актуальність теми дисертації

Статистичне оцінювання параметрів стохастичних дифузійних моделей є одним із класичних напрямів сучасної теорії випадкових процесів, математичної статистики та фінансової математики, який і нині залишається предметом інтенсивних досліджень. Дифузійні моделі природно виникають під час опису еволюції випадкових систем у неперервному часі та використовуються для моделювання широкого кола явищ у фінансах, економіці, страхуванні, фізиці, біології та інших галузях. Статистичне оцінювання параметрів таких процесів систематично вивчається вже понад пів століття; відповідна теорія є добре розвиненою і висвітлена, зокрема, у монографіях Р. Ш. Ліпцера і А. Н. Ширяєва, Ю. А. Кутоянца, B. L. S. Prakasa Rao, S. M. Iacus та інших авторів. У цих та багатьох інших роботах розглянуто методи оцінювання за неперервними та дискретними спостереженнями, встановлено умови конзистентності та асимптотичної нормальності оцінок, а також досліджено особливості статистичного аналізу різних класів дифузійних процесів.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Вх. № 600 «16» 06 2026 р.

Важливе місце серед дифузійних моделей займають моделі Васічека та Кокса – Інгерсолла – Росса, запропоновані для опису динаміки відсоткових ставок. Завдяки поєднанню математичної структури, зручної для аналітичного дослідження, та високої прикладної значущості ці моделі широко застосовуються у фінансовій математиці, економетриці та теорії ризику. Модель Васічека є одним із базових прикладів гауссової афінної моделі з лінійним коефіцієнтом зсуву, тоді як модель Кокса – Інгерсолла – Росса забезпечує невід'ємність траєкторій і тому краще узгоджується з багатьма фінансовими застосуваннями. Водночас остання модель є суттєво складнішою з математичної точки зору, оскільки її коефіцієнт дифузії не є ліпшицевим. Саме тому модель Кокса – Інгерсолла – Росса потребує окремих методів аналізу, а її властивості та задачі статистичного оцінювання параметрів досліджувалися, зокрема, у роботах L. Overbeck, T. Rydén, M. Ben Alaya, A. Kebaier, J. P. N. Bishwal та інших авторів.

Окремої уваги заслуговує проблема оцінювання параметрів дифузійних моделей за дискретними спостереженнями. У теоретичних дослідженнях часто припускається, що траєкторія процесу спостерігається неперервно, однак у реальних застосуваннях дані майже завжди доступні лише у дискретні моменти часу. Це створює додаткові труднощі, пов'язані з дискретизацією, вибором схеми спостережень, контролем похибки заміни інтегралів сумами та збереженням асимптотичних властивостей оцінок. Тому побудова строго конзистентних і асимптотично нормальних оцінок за дискретними даними є важливою задачею як з теоретичної, так і з прикладної точки зору.

В останні десятиліття суттєво зріс інтерес до стохастичних моделей із довгостроковою залежністю. Одним із основних інструментів для опису процесів із пам'яттю став дробовий броунівський рух, витоки якого пов'язані з роботами А. Н. Колмогорова, а сучасне формулювання – з роботами B. B. Mandelbrot і J. W. Van Ness. Моделі, керовані дробовими шумами, активно досліджуються у зв'язку з фінансовими, фізичними та іншими прикладними задачами. Зокрема, значний інтерес викликають дробові моделі Орнштейна – Уленбека та задачі параметричного оцінювання в них; цьому напряму присвячено роботи M. L. Kleptsyna, A. Le Breton, Y. Hu, D. Nualart, C. A. Tudor, F. G. Viens, Ю. С. Мішури, K. Kubilius, S. M. Iacus, K. Es-Sebaiy, K. Tanaka та багатьох інших дослідників. Такі моделі дають змогу враховувати залежність між віддаленими у часі спостереженнями, що є важливим для адекватного опису багатьох реальних часових рядів.

Подальшим розвитком цього напряму стали темперовані дробові процеси, зокрема темперований дробовий броунівський рух та темперований дробовий броунівський рух другого роду. Ці процеси, запропоновані та розвинені у роботах M. M. Meerschaert, F. Sabzikar, D. Surgailis та інших авторів, зберігають локальні властивості дробового броунівського руху, водночас темперування

змінює асимптотичну поведінку кореляційної функції та приводить до швидшого спадання залежності на великих часових проміжках. Завдяки цьому вони є гнучкішими моделями для опису даних, у яких локальна нерегулярність поєднується з послабленням залежності на великих часових масштабах. Водночас статистичні задачі для моделей, керованих темперованими дробовими процесами, залишаються значно менш дослідженими порівняно з класичними броунівськими та дробовими моделями.

Отже, дисертаційне дослідження Приходько О. Д. належить до актуального напряму сучасної теорії і статистики випадкових процесів. Побудова та аналіз оцінок параметрів для моделей Васічека, Кокса – Інгерсолла – Росса та Орнштейна – Уленбека, зокрема за дискретними спостереженнями та у випадку темперованого дробового шуму, є природним продовженням сучасних досліджень у цій галузі. З огляду на це тема дисертації є своєчасною та має безсумнівне наукове значення.

Загальна характеристика та структура дисертації

Дисертаційна робота Приходько О. Д. складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і двох додатків. Загальний обсяг роботи становить 121 сторінку. Дисертацію виконано українською мовою. Матеріал викладено послідовно та зрозуміло; основні результати належно аргументовані, супроводжуються детальними доведеннями та посиланнями на необхідні допоміжні факти.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету, завдання, об'єкт, предмет і методи дослідження, описано наукову новизну та практичне значення одержаних результатів. Також наведено інформацію про особистий внесок здобувачки, публікації за темою дисертації, апробацію результатів, структуру та обсяг роботи.

Перший розділ має оглядовий характер і присвячений аналізу сучасного стану досліджень за тематикою дисертації. У ньому розглянуто основні властивості моделей Васічека, Кокса – Інгерсолла – Росса та Орнштейна – Уленбека, підходи до оцінювання параметрів дифузійних моделей, а також результати, пов'язані з дробовими та темперованими дробовими процесами. Цей розділ окреслює науковий контекст роботи та показує місце отриманих результатів серед відомих досліджень.

Другий розділ присвячено оцінюванню всіх параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями з фіксованим кроком. У розділі розглянуто статистики, побудовані на основі нормованих сум спостережень, сум квадратів та сум добутків сусідніх спостережень, встановлено їх майже напевні границі, а

також досліджено асимптотичні дисперсії та коваріації. На основі отриманих результатів побудовано оцінки всіх трьох параметрів моделі Васічека, доведено їх строгу конзистентність та асимптотичну нормальність, а також виведено асимптотичну коваріаційну матрицю.

У третьому розділі досліджено оцінювання параметрів зсуву в моделі Кокса – Інгерсолла – Росса. Спочатку розглянуто неперервний випадок: встановлено допоміжні асимптотичні властивості інтегралів від розв'язку, його квадрата та куба, а також доведено асимптотичну нормальність неперервної оцінки параметрів зсуву. Далі побудовано дискретний аналог цієї оцінки на основі відповідної схеми спостережень, доведено його строгу конзистентність та асимптотичну нормальність. Важливо, що розглянуті оцінки визначені для всіх додатних значень параметрів зсуву.

Четвертий розділ присвячено темперованому дробовому броунівському руху, темперованому дробовому броунівському руху другого роду та моделі Орнштейна – Уленбека, керованій цими процесами. У розділі наведено означення та основні властивості відповідних темперованих дробових процесів, отримано оцінки для їх дисперсій і приростів, а також встановлено майже напевні асимптотичні оцінки приростів. На основі цих результатів досліджено оцінку параметра зсуву в темперованій моделі Орнштейна – Уленбека та доведено її строгу конзистентність у випадках неперервних і дискретних спостережень.

У розділах 2–4 теоретичні результати доповнено чисельним моделюванням. Для кожної з розглянутих моделей згенеровано траєкторії процесів, обчислено відповідні оцінки параметрів і проаналізовано їх поведінку для різних наборів параметрів. Одержані чисельні результати узгоджуються з теоретичними висновками та ілюструють властивості побудованих оцінок.

У висновках узагальнено основні результати дисертаційної роботи. Додатки містять список публікацій здобувачки за темою дисертації та інформацію про апробацію результатів, а також допоміжні теореми, використані у доведеннях.

Оцінка обґрунтованості наукових результатів дисертації, їх достовірності та новизни

Дисертаційна робота містить низку нових результатів, що стосуються статистичного оцінювання параметрів дифузійних моделей та дослідження властивостей відповідних стохастичних процесів. Авторкою побудовано оцінки параметрів для моделей Васічека, Кокса – Інгерсолла – Росса та Орнштейна – Уленбека, встановлено їх основні асимптотичні властивості, а також одержано результати щодо темперованого дробового броунівського руху і темперованого

дробового броунівського руху другого роду, необхідні для обґрунтування статистичних результатів.

Основними новими результатами дисертаційної роботи є такі:

- для моделі Васічека побудовано оцінки всіх трьох параметрів за дискретними спостереженнями, доведено їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність та отримано відповідну асимптотичну коваріаційну матрицю;
- для моделі Кокса – Інгерсолла – Росса побудовано та досліджено оцінки параметрів зсуву у випадках неперервних і дискретних спостережень; доведено їх строгу конзистентність та асимптотичну нормальність, одержано асимптотичні коваріаційні матриці, причому розглянуті оцінки визначені для всіх додатних значень відповідних параметрів без додаткових обмежень типу умови Феллера;
- для темперованого дробового броунівського руху і темперованого дробового броунівського руху другого роду встановлено майже напевні асимптотичні оцінки приростів, які використовуються для обґрунтування статистичних результатів у темперованій моделі Орнштейна – Уленбека;
- для моделей Орнштейна – Уленбека, керованих темперованим дробовим броунівським рухом та темперованим дробовим броунівським рухом другого роду, побудовано оцінки параметра зсуву у випадках неперервних і дискретних спостережень та доведено строгу конзистентність відповідних оцінок;
- для всіх розглянутих моделей проведено чисельне моделювання: згенеровано дискретні траєкторії процесів, обчислено відповідні оцінки параметрів та показано узгодженість отриманих чисельних результатів із теоретичними висновками.

Новизна дисертаційної роботи полягає у побудові та обґрунтуванні нових оцінок параметрів для розглянутих моделей, а також у встановленні їх асимптотичних властивостей за різних схем спостережень. Достовірність отриманих результатів забезпечується коректним використанням методів теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії стохастичних процесів та стохастичного аналізу. Основні твердження супроводжуються математичними доведеннями, а чисельні експерименти додатково ілюструють узгодженість теоретичних результатів із поведінкою оцінок на змодельованих даних.

Оцінка змісту дисертації, її завершеність та дотримання принципів академічної доброчесності

Дисертаційна робота Приходько О.Д. відповідає вимогам Стандарту вищої освіти зі спеціальності 112 «Статистика» та напрямкам досліджень відповідно до освітньої програми «Статистика».

Дана наукова праця є логічно завершеним дослідженням, що містить власні результати, які є значним вкладом у розвиток теорії випадкових процесів та стохастичних диференційних рівнянь.

У роботі всі використані результати подано з посиланням на джерело, з якого взято відповідний факт. Результати перевірки на академічну доброчесність засвідчують, що власні результати не містять неправомірних запозичень із праць інших авторів та є особисто отриманими здобутками.

Оприлюднення результатів дисертаційної роботи

Наукові результати дисертаційної роботи опубліковано у 4 статтях у періодичних фахових виданнях, що індексуються в наукометричній базі Scopus. Серед них видання, у якому опубліковано результати четвертого розділу, належить до квартиля Q2, видання з результатами третього розділу – до квартиля Q3, а видання, у яких опубліковано дві статті з результатами другого розділу, – до квартиля Q4 відповідно до класифікації SCImago Journal Rank.

Також за результатами дисертаційного дослідження опубліковано 11 тез доповідей на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях.

Ці публікації та конференційні доповіді засвідчують, що основні результати дисертаційного дослідження пройшли належну наукову апробацію та повною мірою відображені в опублікованих працях авторки.

Недоліки та зауваження до дисертаційної роботи

Попри загальну високу оцінку дисертаційної роботи, до неї можна висловити такі зауваження та рекомендації.

1. У теоремі 3.2 для дискретної оцінки параметрів зсуву моделі Кокса – Інгерсолла – Росса строгу конзистентність доведено для всіх $\beta > 0$, тоді як асимптотичну нормальність встановлено за додаткової умови $\beta > 1$. Було б корисно додати короткий коментар щодо природи цього обмеження. Зокрема, при $\beta > 1$ схема спостережень є достатньо щільною, щоб похибка дискретизації не впливала на граничний розподіл оцінки, і тому дискретна оцінка має той самий асимптотичний розподіл, що й її неперервний аналог. Водночас цікавим напрямом подальших досліджень є випадок менш щільної схеми спостережень, наприклад $0 < \beta \leq 1$, коли дискретизаційна похибка

може впливати на граничний розподіл та асимптотичну коваріаційну матрицю оцінки.

2. У четвертому розділі встановлено строгу конзистентність оцінки параметра зсуву в темперованій моделі Орнштейна – Уленбека для неперервних і дискретних спостережень. Водночас у роботі не розглядається питання про швидкість збіжності та граничний розподіл цієї оцінки. Це питання є природним напрямом подальших досліджень, особливо з огляду на неергодичність моделі та можливість появи нетипових граничних розподілів.
3. Чисельні експерименти, наведені в дисертації, добре ілюструють отримані теоретичні результати. Водночас додаткове порівняння запропонованих оцінок з іншими відомими методами на однакових змодельованих даних могло б зробити чисельну частину роботи ще більш інформативною та дозволило б краще оцінити практичні властивості побудованих процедур.
4. Робота загалом оформлена охайно, однак у тексті трапляються окремі редакційні недоліки. Зокрема, деякі стандартні позначення доцільно було б ввести або нагадати при першому використанні. Наприклад, у формулюванні теореми 2.2 використовується позначення $\xrightarrow{d}$, а в її доведенні з'являється позначення $\xrightarrow{\mathbb{P}}$; для зручності читача варто було б коротко зазначити, що вони позначають збіжність за розподілом та збіжність за ймовірністю відповідно. Також бажано уніфікувати ці позначення впродовж роботи.

Зазначені зауваження мають рекомендаційний характер і стосуються переважно можливих напрямів подальшого розвитку дослідження та окремих аспектів викладення матеріалу. Вони не применшують наукової новизни, теоретичної значущості та практичної цінності отриманих результатів, не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи та особистого внеску здобувачки.

Висновок про дисертаційну роботу

Дисертація здобувачки Приходько О.Д. є самостійним, завершеним і актуальним науковим дослідженням, у якому отримано нові науково обґрунтовані результати, що мають істотне значення для розвитку теорії випадкових процесів, статистики стохастичних процесів та стохастичних диференційних рівнянь. Матеріал викладений чітко, робота містить аргументовані доведення з посиланням на всі необхідні факти. Праця оформлена з дотриманням всіх вимог та з дотриманням академічної доброчесності.

Дисертаційна робота Приходько Ольги Дмитрівни задовольняє вимогам чинного законодавства України, що передбачені в п.6 – 9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44 (зі змінами).

Здобувачка Приходько Ольга Дмитрівна заслуговує на присудження ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 112 «Статистика».

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей Національного
технічного університету України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського» **Олександр ІВАНОВ**

Підпис Іванова О. В. ЗАСВІДЧУЮ
Вчений секретар
КПІ ім. Ігоря Сікорського **Валерія ХОЛЯВКО**

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Вх. № 600 «16» 06 2026 р.